



**Zadania na XIII Podkarpacki Konkurs Matematyczny  
im. Franciszka Lejki  
Poziom I**

(klasy pierwsze szkół ponadgimnazjalnych i trzecie gimnazjów)

Etap rejonowy

16 marca 2013 r. godzina 10.00

(150 minut)

1. Liczby  $a$  i  $b$  spełniają równości:  $a^3 - 3ab^2 = 29$  i  $b^3 - 3a^2b = 34$ .  
Oblicz  $a^2 + b^2$ .
2. Dwie beczki zawierają razem 240 litrów wody. Gdyby z pierwszej beczki przelać do drugiej tyle litrów wody, żeby zawartość drugiej beczki podwoiła się, a następnie z drugiej beczki przelać do pierwszej tyle litrów wody, żeby zawartość pierwszej beczki podwoiła się, to w obu beczkach będzie jednakowa liczba litrów wody. Ile litrów wody było pierwotnie w każdej beczce?
3. W kwadracie o boku długości 1 ścięto naroża tak, że powstał ośmiokąt o równych długościach boków. Oblicz pole i obwód tego ośmiokąta.
4. Udowodnij, że jeżeli  $x^3 + y^3 = 40$  i  $x^2 - xy + y^2 = 8$ , to  $xy = \frac{17}{3}$ .
5. W trójkącie prostokątnym dwusieczna kąta ostrego dzieli przeciwległy bok w stosunku 2:3. Oblicz  $\frac{r}{R}$ , gdzie  $r$  oznacza promień okręgu wpisanego w dany trójkąt, zaś  $R$  promień okręgu opisanego na tym trójkącie. Udowodnij, że podany stosunek promieni  $\frac{r}{R}$  jest co do wartości mniejszy od  $(\sqrt{2} - 1)$ .

Powodzenia!